Quantificateurs Généralisés

1 Quantificateurs en logique des prédicats

Comment interpréter les formules :

(1) a. $\forall x \phi$
b. $\exists x \phi$

Une définition assez intuitive pourrait être : $V(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un individu dans le domaine qui vérifie φ.

— Mais que signifie ici "vérifier" la formule φ ?

$\exists x E(x)$ est vraie s'il existe un individu dans le domaine D, appelons-le d, tel que, si g est telle que $g : x \mapsto d$, alors $V_{\mathcal{M},g}(E(x)) = 1$.

On pourrait écrire :

(2) $V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe $d \in D$ et $g : x \mapsto d$ tels que $V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$.

Mais cette définition n'est pas assez générale : supposons que φ contienne à son tour un autre quantificateur. Alors il faudra trouver un autre fonction, g', qui associera la variable en jeu avec l'individu du domaine concerné. La question est alors de régler le lien entre g et g'.

Pour cela, on introduit la notation : $g[y/d]$ = affectation g, sauf pour $y \mapsto d$.

Alors on peut écrire :

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ \varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

de même,

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\forall y\ \varphi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D,\ V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

Finalement, si φ est une phrase, son interprétation ne dépend pas de l'affectation g. Alors on dira, pour toute **phrase** φ :

$$\underline{V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ssi il existe une affectation } g \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1}$$

Modèles Soit $M = \langle U, I \rangle$ le modèle suivant : $U = \{\text{Alain}, \text{Béatrice}, \text{Christine}, \text{David}\}$. $I(a) = \text{Alain}$; $I(b) = \text{Béatrice}$; $I(c) = \text{Christine}$; $I(d) = \text{David}$

$I(H) = \{\text{Alain, David}\}$; $I(F) = \{\text{Christine, Béatrice}\}$
$I(A) = \{\langle \text{Alain}, \text{Christine}\rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{David}\rangle\}$
$I(D) = \{\langle \text{Christine}, \text{David}\rangle, \langle \text{Alain}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{David}, \text{Béatrice}\rangle, \langle \text{Christine}, \text{Alain}\rangle\}$

a. Évaluez la valeur de vérité des formules suivantes dans ce modèle :

a. $D(d, b)$
b. $H(d) \wedge D(c, d)$
c. $D(d, b) \rightarrow F(a)$
d. $H(c) \wedge (H(a) \rightarrow D(a, c))$

2 Insuffisance de la logique des prédicats

2.0.1 Restriction

La quantication logique n'a qu'un seul argument (qui est sa portée, formule bien formée). Les quantificateurs ont en deux arguments en langue naturelle.

(3) Tous_les [enfants] sont [joueurs].

(4) a. Logique : Q (proposition)
b. LN : Q (Rest) (Scope)

2.0.2 Manque de parallélisme

Diverses constructions qui sont toutes analysées syntaxiquement comme des NP sont « traduites » de façon très disparate en logique des prédicats :

(5)

[Jean $_{\text{NP}}$] dort	dort(j)
[Certains hommes $_{\text{NP}}$] dorment	$\exists x\ (Hx \wedge Dx)$
[Tous les hommes $_{\text{NP}}$] dorment	$\forall x\ (Hx \rightarrow Dx)$
[Au moins deux hommes $_{\text{NP}}$] dorment	$\exists x \exists y (x \neq y \wedge Hx \wedge Hy \wedge Dx \wedge Dy)$

2.0.3 Il y a d'autres "quantificateurs" que $\forall$ et $\exists$

Il y a d'autres quantificateurs (au sens linguistique) que les deux quantificateurs de la logique du premier ordre.

(6) a. Un nombre fini d'étoiles sont sensibles à l'attraction du soleil.
b. Plus de la moitié des amis de Jean sont parisiens.
c. La plupart des gens ont voté Macron.

On ne fait pas allusion ici simplement au fait que certains quantificateurs de la langue ne se traduisent pas directement en $\exists$ ou $\forall$ (par exemple, *exactement deux* ne correspond ni à $\exists$, ni à $\forall$, mais à une formule plus complexe impliquant $\exists$, l'égalité et une négation), mais au fait qu'il est strictement impossible de les exprimer en logique du premier ordre. (voir Barwise & Cooper 1981)

— Il n'existe pas de formule $\Phi(x)$ et de quantificateur Q tels que *La plupart des A B* aie les mêmes conditions de vérité que $Qx\ \Phi(x)$. (à comparer avec $\forall x\ (Hx \rightarrow Dx)$).

3 Les quantificateurs généralisés

Idée générale : on connaît les prédicats, qui sont des propriétés d'individus ; on va généraliser cette notion en parlant de prédicat d'ensemble, ou de propriété d'ensemble.

— QGs sont des ensembles d'ensemble.

(7) $(\exists x)\varphi(x)$: dit que l'ensemble des choses qui satisfont $\varphi(x)$ est non vide.

$\exists x A$ est vrai si et seulement si A est non vide : $\exists x A \equiv$ non-vide(A)

L'hypothèse majeure qui a été faite par Barwise et Cooper et d'autres, dans les années 80, est la suivante :

> La dénotation des NP est (dans tous les cas) un quantificateur généralisé (au sens de Mostowski).

Cette terminologie est quelquefois source de confusion : bon nombre de NP contiennent eux-même un déterminant (certains, tout, ...) qui est aussi appelé *quantificateur*. Ici, c'est de tout le NP que l'on parle, en disant qu'il dénote un ensemble d'ensembles.

Si l'on décline cette hypothèse pour quelques NP courants, cela donne :

(8)
a. $[\![\text{Tous les N}]\!] = \{X \subseteq E\ /\ [\![N]\!] \subseteq X\}$
b. $[\![\text{ Quelques N}]\!] = \{X \subseteq E\ /\ [\![N]\!] \cap X \neq \emptyset\}$
c. $[\![\text{Jean}]\!] = \{X \subseteq E\ /\ j \in X\}$
d. $]\!]\text{Au moins deux N}]\!] = \{X \subseteq E\ /\ |[\![N]\!] \cap X| \geq 2\}$
e. $[\![\text{ La plupart des N }]\!] = \{X \subseteq E\ /\ |[\![N]\!] \cap X| \geq |[\![N]\!] \setminus X|\}$

Une telle analyse répond aux deux difficultés indiquées plus haut :

— Elle permet de formuler dans le même langage les propriétés de tous les NP (c'est du moins ce que l'on peut supposer). Cela est dû à une augmentation du pouvoir expressif du formalisme, qui permet ici de "faire du second ordre".

— En formulant de façon uniforme la contribution sémantique des NP, elle simplifie l'analyse compositionnelle des NP.

Ainsi, si la dénotation d'un VP est un prédicat, et celle du NP un QG, alors la règle de combinaison associée à S dans $S \rightarrow NP\ VP$ est $\llbracket VP \rrbracket \in \llbracket NP \rrbracket$.

S

NP VP

3.1 Vision relationnelle

Dans (9), le déterminant établit une relation entre l'ensemble des enfants et l'ensemble des dormeurs : (9) est vraie ssi $\llbracket$ enfants $\rrbracket \subseteq \llbracket$ dormeur$\rrbracket$.

(9) Tous les enfants dorment

(10) $\llbracket$Tous les $A\ B\rrbracket = 1 \Leftrightarrow \llbracket A\rrbracket \subseteq \llbracket B\rrbracket$.

On aboutit alors à une reformulation de la sémantique des quelques déterminants courants :

(11)
a. $\llbracket$Tous les $A\ B\rrbracket = 1 \Leftrightarrow \llbracket A\rrbracket \subseteq \llbracket B\rrbracket$
b. $\llbracket$Certains $A\ B\rrbracket = 1 \Leftrightarrow \llbracket A\rrbracket \cap \llbracket B\rrbracket \neq \emptyset$
c. $\llbracket$La plupart $A\ B\rrbracket = 1 \Leftrightarrow |\llbracket A\rrbracket \cap \llbracket B\rrbracket| \geq |\rrbracket A\rrbracket \setminus \llbracket B\rrbracket|$
d. $\llbracket$Beaucoup $A\ B\rrbracket = 1 \Leftrightarrow |\llbracket A\rrbracket \cap \llbracket B\rrbracket| \geq m|\llbracket A\rrbracket|$