Logique des Propositions[1]

La logique des propositions constituera le premier outil qui va nous donner les moyens de représenter de façon formelle et calculable les propriétés sémantiques de la langue naturelle.

1 Logique, raisonnement

La logique peut être définie comme **l'étude des raisonnements valides.**

- Les logiciens se sont intéressés, depuis longtemps, aux propriétés **formelles** des raisonnements valides.
- La démarche consiste à considérer des raisonnements valides, comme ceux de (1), et à tenter de mettre en évidence les propriétés sous-jascentes de ces raisonnements, en faisant abstraction des éléments non pertinents.
  - En (1-a), on peut remplacer *homme* par *pingouin* dans toutes ses occurrences, et on conserve la validité du raisonnement.

(1) a.

Prémisses	Tous les hommes sont mortels
	Socrates est un homme
Conclusion	Socrates est mortel

b.

Prémisses	S'il pleut, la route est mouillée
	La route n'est pas mouillée
Conclusion	Il ne pleut pas

Les raisonnements valides constituent les données de départ du/de la **logicien.ne**.

- Les linguistes cherchent à élaborer un système qui reproduit ces jugements de validité, produits de la « compétence rationnelle » des sujets.
- Notre travail se rapproche au travail des psychologues du raisonnement, qui étudient comment les êtres humains raisonnent.

(2)

Prémisses	Tou.te.s les linguistes sont chimistes.
	Certain.e.s chimistes sont dentistes.
Conclusion	Certain.e.s linguistes sont dentistes.

La logique des propositions ne va s'intéresser qu'à certains raisonnements.

- Dans (1-b), on peut observer que les éléments essentiels qui rendent le syllogisme valide sont les connecteurs *si* et la négation. On a quelque chose comme « Si P Q ; non Q ; donc non P ». C'est là-dessus que la logique propositionnelle va travailler.

1. Ces notes sont très fortement basées sur les notes de cours de Pascal Amsili.

(3) La logique des propositions se concentre sur deux classes d'objets, les **propositions**, et les **connecteurs**.

— Dans (1-a), pour trouver les arguments formels qui rendent le syllogisme concluant, il faut regarder « à l'intérieur » des propositions en jeu, observer que les mêmes termes réapparaissent sous des quantifications variées, etc. La logique propositionnelle ne va rien avoir à dire là-dessus. (C'est le domaine de la logique des prédicats...)

2 Les objets de base

2.1 Propositions

(4) **Proposition :** toute expression qui peut être dite vraie ou fausse.

Cette définition exclut, entre autres, les questions (5-a), les impératifs (5-b), les exclamatifs (5-c), et plus généralement tous les énoncés dits *non assertifs*, comme certains performatifs (5-d), certains énoncés à fonction phatique (5-e), ou — on peut en discuter — toute la classe des énoncés modalisés (5-f).

(5) a. Est-ce que Paul aime la marche à pied ?
b. Fermez la porte !
c. Qu'elle est gentille !
d. Je te promets de venir
e. Tu m'entends !
f. La bataille aura lieu demain

En logique propositionnelle, les propositions vont rester **inanalysées**, **atomiques** — sauf quand elles peuvent se décomposer en d'autres propositions et des connecteurs.

2.1.1 Proposition vs phrase ?

Quel est le rapport entre phrase (au sens linguistique) et proposition (au sens logique) ?

Il est clair que ce rapport n'est pas direct :

1. Deux phrases peuvent exprimer la même proposition (par exemple dans deux langues différentes, ou encore lorsque l'on utilise des variantes lexicales (*dame*/ *femme*)).
2. Une phrase peut contenir plusieurs propositions (soit par la présence d'un connecteur (6-a), soit par des effets sémantiques (présupposition en (6-b)) ou

pragmatiques (6-d), soit par ambiguïté (6-e)).

(6)
a. Si Pierre chante, tout le monde se plaint
b. Le Roi de France est chauve
c. Avant son mariage, il était moins bien nourri
d. Même Jean est venu
e. Toutes les français admirent un acteur

2.2 Connecteurs

(7) **Connecteurs :** des opérateurs qui permettent, en reliant deux propositions, de former une nouvelle proposition.

Avec cette définition, le prototype du connecteur est le mot *et*, qui (au moins dans certains cas) fonctionne en effet de cette manière-là : la phrase (8-a) est une proposition formée au moyen du connecteur *et* et de deux (autres) propositions.

(8)
a. Il pleut à Montréal.
b. Il neige à Paris.
c. Il pleut à Montréal et il neige à Paris.

2.2.1 Veri-fonctionnalité et compositionalité

Les connecteurs qui nous intéressent ici sont caractérisés par leur sensibilité exclusive à la vérité ou la fausseté de leurs opérandes, c'est ce que l'on appelle le caractère **véri-fonctionnel** des connecteurs. Il y a en langue des expressions qui semblent jouer un rôle de connecteur, mais qui ne sont pas véri-fonctionnelles.

(9)
a. Jean s'est cogné et il pleure
b. Jean pleure parce qu'il s'est cogné
c. Jean pleure
d. Jean s'est cogné

Supposons que (a) soit vraie. Prenons à la place de 'Jean pleure' une autre proposition vraie, par exemple 'il pleut', alors "Jean s'est cogné et il pleut" est vraie aussi. De même, si on suppose (c) fausse, la valeur de vérité de (9-a) n'est pas modifiée par la substitution de 'Jean pleure' par une autre proposition fausse.

— Par rapport à l'interprétation de *et*, ce qui compte est simplement la valeur de vérité des arguments.

Si on fait la même substitution dans (b), on obtient une phrase fausse. Pourquoi ? Parce que le connecteur *parce que* ne dépend pas seulement des valeurs de vérité de ses opérandes.

En nous restreignant aux connecteurs véri-fonctionnels, on bénéficie d'une conséquence directe de la **compositionalité** : pour calculer la vérité d'une proposition, il suffit de regarder la vérité des propositions qui la composent.

3 Syntaxe

Un langage se définit au moyen

1. d'un alphabet (c'est-à-dire d'un ensemble de symboles),
2. d'une syntaxe, qui détermine la façon d'organiser les symboles pour former des expressions (bien formées),
3. d'une sémantique, qui fixe la signification des symboles élémentaires et une méthode de calcul pour la composition des significations.

3.1 Formules bien formées

Soit L_p le langage de la logique des propositions.

Le vocabulaire de L_p est constitué (i) d'un ensemble de *symboles de proposition* P, Q, R..., (ii) du connecteur unaire $\neg$, (iii) des connecteurs binaires $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, et (iv) des parenthèses (et).

Les **formules bien formées** du langage L_p sont données par :

1. Tous les symboles de propositions sont des formules de L_p.
2. Si φ est une formule de L_p, alors $\neg\varphi$ est une formule de L_p.
3. Si φ et ψ sont des formules de L_p, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L_p.
4. Rien d'autre n'est une formule (Seules sont des formules les expressions qui peuvent être générées par les règles 1, 2 et 3 en un nombre fini d'étapes).

La signification précise des connecteurs est donnée plus loin, mais on peut déjà indiquer leur nom : $\wedge$ est appelé **et** (logique) ou conjonction ; $\vee$ est appelé **ou** (logique), ou disjonction, ou **ou inclusif** ; $\rightarrow$ est appelé **implication** ou conditionnel (matériel) ; et $\leftrightarrow$ est appelé **équivalence** (matérielle).

3.2 Arbres de construction

La définition récursive précédente permet de donner, pour tout formule bien formée, un **arbre de construction** (ou de décomposition). Par exemple, la formule (bien formée) (10) peut-être décomposée de la manière représentée à la figure 1.

(10) $((\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg\neg\neg Q) \leftrightarrow R)$

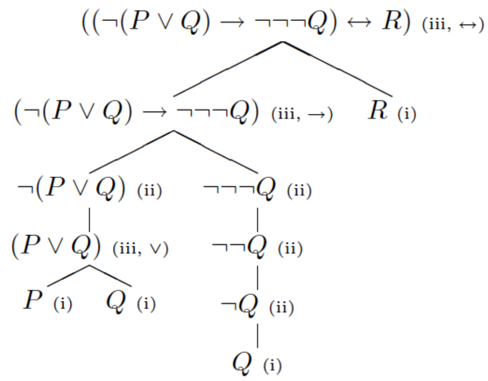

FIGURE 1 – Exemple d'arbre de construction

L'arbre de construction peut être vu comme la trace de la vérification qu'une suite de symbole est une formule bien formée.

— Le connecteur $\leftrightarrow$ est appelé **signe principal** de la formule (10).

— La formulation des règles de syntaxe garantit que toute formule a un et un seul signe principal.

— Toute formule bien formée a un et un seul arbre de construction (c'est une conséquence du fait que le langage de la logique est syntaxiquement non ambigu).

— Toutes les **sous-formules** apparaissent dans l'arbre (une sous-formule d'une formule φ est une suite (contiguë) de symboles de φ qui est elle-même une formule bien formée).

4 Sémantique

Donner une sémantique à un langage formel consiste à définir une fonction (au sens mathématique) qui est capable d'associer à toute formule bien formée un « sens ».

— Le sens d'une formule sera simplement une valeur de vérité (vrai ou faux).

Pour définir cette fonction, on procède en deux étapes :

1. On donne un sens (une sémantique) aux éléments atomiques du langage (les variables propositionnelles et les connecteurs (qu'on appelle quelquefois **constantes logiques**).
2. On donne une méthode de calcul pour calculer le sens de toute formule complexe à partir du sens des constituants plus simples.

Les règles que nous donnerons ci-après ne permettent évidemment pas de décider, en général, si une proposition quelconque (par exemple (11-a) est vraie ou fausse. En revanche, ces règles permettront de décider si (11-c) est vraie, dès lors que l'on sait si (11-a) et (11-b) le sont.

(11) a. Il pleut à Montréal.
b. Il neige à Paris.
c. Il pleut à Montréal et il neige à Paris.

Autrement dit, pour décider si une formule est vraie (par exemple $P \wedge Q$), il est nécessaire de fixer les valeurs des propositions élémentaires qui interviennent dans la formule (ici, P et Q).

4.1 Éléments atomiques

4.1.1 Symboles de proposition

Les symboles de proposition ont deux valeurs possibles, vrai ou faux, que nous noterons conventionnellement 1 et 0.

4.1.2 Connecteurs : tables de vérité

Au point de vue sémantique, les connecteurs peuvent être vus comme des fonctions : étant données deux propositions (deux valeurs de vérité) ils donnent une valeur de vérité.

Il est facile de résumer le comportement d'un connecteur sous la forme d'une table de vérité.

(12)

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4.2 Calcul

4.2.1 Tables composites

La méthode de calcul de la valeur de vérité d'une formule repose sur la décomposition de cette formule : on crée un tableau avec une colonne par sous-formule de la formule initiale.

— Chaque ligne de ce tableau va correspondre à une situation possible, où par situation on entend une combinaison particulière de valeurs de vérité pour les propositions élémentaires.

(13) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Notation équivalente :

(14)

(	(	p	$\wedge$	(	q	$\rightarrow$	r	)	)	$\vee$	(	r	$\rightarrow$	p	)	)
		0	0		0	1	0			1		0	1	0		
		0	0		0	1	1			0		1	0	0		
		0	0		1	0	0			1		0	1	0		
		0	0		1	1	1			0		1	0	0		
		1	1		0	1	0			1		0	1	1		
		1	1		0	1	1			1		1	1	1		
		1	0		1	0	0			1		0	1	1		
		1	1		1	1	1			1		1	1	1		

(15) a. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
b. Situation : Pierre ne vient pas, Marie vient, Jean vient.
c. $\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$
d. P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »

4.2.2 Équivalence logique

La détermination de la valeur de vérité de la formule dans tous les cas de figure permet de s'intéresser à des propriétés générales de certaines formules, et de les comparer entre elles. Par exemple, le tableau donné sous (**??**), reproduit ici, comprend une dernière colonne qui ressemble point pour point à celle de $p \vee q$.

(16)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Le fait que les deux colonnes soient identiques signifie que les deux formules ($\neg(\neg p \wedge \neg q)$ et $p \vee q$), **dans toutes les situations**, ont la même valeur de vérité. On dira que ces formules sont **(logiquement) équivalentes**.

4.2.3 Tautologies, contradictions

On peut aussi rencontrer des formules qui présentent des propriétés remarquables. Ainsi, dans la table de vérité suivante, on trouve une

(17) a. **Tautologies :** formules sont vraies dans toutes les situations.
b. **Contradictions :** formules sont fausses dans toutes les situations.

(18)

p	q	$(p \to q)$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$	$(q \vee \neg q)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

La plupart des formules, dont la valeur de vérité dépend de la situation (c'est-à-dire des valeurs de vérité des formules atomiques), et ne sont par conséquent ni des tautologies ni des contradictions, seront dites **contingentes**.

— On utilise la (méta-)notation $\models \varphi$ pour indiquer que φ est une tautologie.

4.2.4 Équivalence matérielle

Il est facile de vérifier (et même de démontrer) que si φ et ψ sont logiquement équivalentes, alors la formule $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est toujours vraie (c'est-à-dire est une tautologie).

(19)

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \leftrightarrow \neg\neg p$
1	0	1	1
0	1	0	1

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

En fait, c'est un théorème de la logique des propositions :

(20) *φ et ψ sont logiquement équivalentes ($\varphi \equiv \psi$) ssi ($\varphi \leftrightarrow \psi$) est une tautologie.*