Logique des Prédicats

1 Logique des propositions (deuxième partie)

On peut formaliser complètement (« algorithmiquement ») le calcul de la valeur d'une formule, **une fois connues les valeurs des propositions qui la composent**.

- *Modèle* : une fonction mathématique de l'ensemble des symboles de proposition dans l'ensemble $\{0, 1\}$.
- On appelle une telle fonction, notée V, une *valuation*.

Alors, l'interprétation d'une formule quelconque φ (notée $[\![\varphi]\!]_V$ pour rappeler qu'elle dépend de V) peut être donnée par les règles suivantes :

1. Si φ est un symbole de proposition, alors $[\![\varphi]\!]_V = V(\varphi)$;

Pour toutes formules φ et ψ :

2. $[\![\neg\varphi]\!]_V = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 0$;
3. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_V = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 1$ et $[\![\psi]\!]_V = 1$;
4. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_V = 0$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 0$ et $[\![\psi]\!]_V = 0$;
5. $[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]_V = 0$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = 1$ et $[\![\psi]\!]_V = 0$;
6. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!]_V = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]_V = [\![\psi]\!]_V$;

Ces règles sont "calquées" sur la syntaxe, et nous donnent des règles d'interprétation qui en fait décomposent (récursivement) la formule jusqu'à trouver des sous-formules élémentaires dont la valeur de vérité ne dépend plus que du modèle (c'est-à-dire de V).

On peut facilement prouver que l'algorithme précédent, étant donnée une formule propositionnelle quelconque, permet de déterminer quand la formule est vraie ou fausse, au bout d'un nombre fini d'étapes.

- Il suffit de remarquer que la table de vérité d'une formule comportant n atomes comprend au plus 2^n lignes.

La logique des propositions est **décidable**.

1.1 Conséquence logique

La logique, comme modèle du raisonnement, a pour objectif de permettre de démontrer des syllogismes. Alors, il ne s'agit pas seulement de décider si une formule est vraie ou fausse dans une situation, mais plutôt si la vérité d'une proposition (la conclusion) découle nécessairement de la vérité d'autres propositions (les prémisses).

(1) **Conséquence logique :** une formule F est une conséquence logique d'un ensemble de formules Γ si toute valuation qui donne vrai à toutes les formules de Γ donne vrai à F. On note cela $\Gamma \models F$.

Un exemple, avec $\Gamma = \{(p \wedge q), (q \rightarrow \neg r)\}, F = \neg r$:

On a :	$(p \wedge q)$	$\models$	q
De plus :	$q, (q \rightarrow \neg r)$	$\models$	$\neg r$
Donc :	$(p \wedge q), (q \rightarrow \neg r)$	$\models$	$\neg r$

2 La logique des prédicats

(2)

Si Jean est malade, il ne sort pas	$P \rightarrow \neg Q$
Jean est malade	P
Jean ne sort pas	$\neg Q$

(3)

Si un homme est malade, il ne sort pas	$P \rightarrow \neg Q$
Jean est un homme malade	R
Jean ne sort pas	$\neg Q'$

2.1 Objets de base

— Platon est un homme

— Socrate est mortel

— Le train siffle

— Cette bouilloire fuit

Dans chaque phrase on peut identifier : une partie "propriété" (prédicat), et une partie "entité" (individu). Vont leur correspondre en logique de prédicats : des noms de prédicats (constantes de prédicat), et des constantes individuelles, une phrase étant considérée comme l'application (fonctionnelle) d'un prédicat à un individu.

— H(p)

— M(s)

— S(t)

— F(b)

Généralisation : prédicats n-aires Les exemples suivants peuvent aussi, surtout dans la tradition aristotélicienne, se décomposer en un sujet, un prédicat :

(4) a. Jean est plus grand que Paul
b. Dominique plume le poulet
c. Socrate admire Marie

Est-ce qu'on peut traiter *plus grand que Paul* comme prédicat unaire ?

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Jean est plus grand que Paul}\\ \text{Paul est plus grand que Pierre}\end{array}}{\text{Jean est plus grand que Pierre}}$$

(5) $$\frac{\begin{array}{c}\mathrm{P(j,\ p)}\\ \mathrm{P(p,\ i)}\end{array}}{\mathrm{P(j,\ i)}}$$

On peut alors généraliser la définition précédente : une phrase atomique sera formée avec un symbole de prédicat n-aire (d'**arité** n) et n constantes.

(6) Ordre des arguments
  a. Pierre aime Marie : $A(p, m)$
  b. Marie aime Pierre : $A(m, p)$

2.2 Quantificateurs

(7) a. Frédérique est gentille. $G(f)$
  b. Tous sont gentils $G(t)$? ?
  c. (Il y a) quelqu'un (qui) est gentille. G(e) ? ?
  d. Personne est gentil. $G(p)$? ?

Pour exprimer cela, on introduit :

1. une variable ; et
2. un signe pour signifier "pour toute valeur de la variable".

(8) a. $\forall x\ G(x)$ Quantificateur universel
  b. $\exists x\ G(x)$ Quantificateur existentiel

Est-ce que $\exists$ est nécéssaire ? Sinon, comment écrirait-on (8-b) ?

Normalement, quand on a une phrase en français, on forme des propositions universelles avec une **restriction**.

(9) a. Tous les philosophes sont assis : $\forall x(P(x) \rightarrow A(x))$
  b. Un philosophe est assis : $\exists x(P(x) \wedge A(x))$

- La formule $\forall x(P(x) \wedge A(x))$ ne serait vraie que dans un univers où il n'y a que des philosophes (et ils sont tous assis).
- La forme avec le conditionnel $\exists x(P(x) \rightarrow A(x))$ serait vraie s'il n'y a aucun philosophe

3 Syntaxe

3.1 Formules

En logique des propositions, on définit syntaxiquement les **formules** (ou expressions) **bien formées**.

En logique des prédicats, on distinguera deux types d'expressions dans le langage

1. les **formules (bien formées)**,
2. les **phrases** qui sont des formules bien formées qui expriment des propositions.

Les formules bien formées qui ne sont pas des phrases correspondent intuitivement à des propriétés, ou des relations.

Vocabulaire : Constantes, Noms de prédicat (arité fixe), connecteurs (cf. Lprop), quantificateurs, et un stock infini de variables.

Définition 1

(i) Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors $A(t_1, ..., t_n)$ est une formule.

(ii) Si φ est une formule dans L, alors $\neg\varphi$ l'est aussi.

(iii) Si φ et ψ sont des formules dans L, alors $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L.

(iv) Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L.

(v) Rien d'autre n'est une formule

Décomposer en sous-formules :

(10) $\forall x(\exists y(H(xy) \land F(y)) \rightarrow \exists y(H(xy) \land Gy) \leftrightarrow \forall x\forall y\exists z(H(xy) \land Fy \rightarrow H(xz) \land Gz)$

Définition 2

Si $\forall x\psi$ est une sous-formule de φ, alors ψ est appelé la **portée** de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans φ. Même définition pour $\exists x$.

Exemple : $\exists y(\forall z(\exists wA(z, w) \rightarrow A(y, z)) \land A(x, y))$

Il faut distinguer les différentes **occurrences** d'un quantificateur : $(\exists xA(x) \land \exists xB(x))$.

Définition 3

(a) Une occurrence d'une variable x dans la formule ϕ (qui n'est pas une partie d'un quantificateur) est dite **libre** si cette occurrence de x ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ apparaissant dans ϕ.

(b) Si $\forall x\psi$ (ou $\exists x\psi$) est une sous-formule de ϕ et x est libre dans ψ, alors cette occurrence de x est dite **liée** par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).

Conséquence : toute variable est soit libre, soit liée par un quantificateur (et un seul).

Noter que dans $\forall x(A(x) \wedge \exists x B(x))$ les deux occurrences de x sont liées par deux quantificateurs différents. Pour éviter les confusions, on renommera les variables (muettes).

Noter aussi que dans $\forall x A(y)$, le quantificateur ne lie aucune variable.

Définition 4

Une **phrase** est une formule sans variable libre.

$\forall x A(y)$ n'est pas une phrase, par exemple.

Une formule avec des variables libres est appelée **fonction propositionnelle** :
$P(x) \to G(x)$ est une fonction de l'ensemble des constantes vers les propositions.
Notation : $[j/x](P(x) \to G(x))$ a les mêmes conditions de vérités que $P(j) \to G(j)$
(N.B. : on ne remplace que les occurrences libres : $[c/x](\forall x A(x,x))$ reste inchangé).

4 Sémantique

4.1 Modèle (extensionnel) du premier ordre

Les propositions parlent d'**individus** et de **propriétés**.

Un **modèle mathématique** d'une situation devra minimalement distinguer ces deux notions.

(11) **Modèle extentionel du premier ordre** : un **ensemble d'individus** (d'entités), à l'intérieur duquel chaque propriété est représentée par un sous-ensemble.

Dire $H(s)$ revient à dire que l'individu **dénoté** par s *appartient* à l'ensemble **dénoté** par H.

On généralise facilement aux relations n-aires. (comment ?)

4.2 Interprétation

On se donne un modèle $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un domaine D, un ensemble d'ensembles, et une fonction d'interprétation I ($\langle D, I \rangle$).

- I associe un élément du modèle (individu ou ensemble, selon le cas) à toutes les constantes non logiques du langage (constantes individuelles et noms de prédicats).

On introduit une fonction de valuation, V, qui associe 1 ou 0 à toute formule. V dépend de $\mathcal{M}$.

En excluant les variables et les quantificateurs, on peut proposer les règles suivantes :

- Si P est un symbole de prédicat, c_1, c_2, ..., c_k des constantes, alors $V_{\mathcal{M}}(P(c_1, c_2, ..., c_k)) = 1$ ssi $\langle I(c_1), I(c_2), ..., I(c_k) \rangle \in I(P)$
- Si φ et ψ sont des formules, $V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
  $V_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $V_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $V_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $V_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$

4.2.1 Variables libres

Pour connaître la valuation de $P(x)$, il faut que x désigne un individu dans le modèle.

- Pour formaliser cet aspect, on utilise des fonctions, qu'on appelle *assignment* (affectation) qui associent à chaque variable du langage un individu du domaine.
- L'interprétation d'une formule comme $P(x)$ pourra se faire dès lors qu'on disposera d'une telle fonction, soit g : $V_{\mathcal{M}}(P(x)) = 1$ ssi $g(x) \in I(P)$.
- En toute rigueur, la valuation dépend alors non seulement de $\mathcal{M}$ (et de I) mais aussi de g :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(x)) = 1 \text{ ssi } g(x) \in I(P)$$

Pour formuler facilement les règles, on introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable) : $[\![t]\!]_{\mathcal{M},g} = I(t)$ si t est une constante
$[\![t]\!]_{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable

On doit alors ré-écrire la première règle de calcul donnée plus haut :
$V_{\mathcal{M},g}(\mathrm{P}(\mathrm{t}_1, \ldots\ t_n)) = 1$ ssi $\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, \ldots [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g} \rangle \in I(P)$.